DETERMINATION DE L'ATTRACTION

QU'EXERCERAIT SUR UN POINT DONNE

UNE PLANETE DONT LA MASSE SERAIT

UNIFORMEMENT REPARTIE

SUR TOUT L'ORBITE QU'ELLE DECRIT

AU COURS DU TEMPS[1]

C.F. Gauss

Remarque
On trouvera, ici traduit, les paragraphes 16, 17, 18, et 19 du mémoire précédemment nommé. Ce sont les passages qui concernent précisément l'Agm. Pour obtenir l'attraction qu'il cherche, il est amené après un certain nombre de manipulations à calculer les 2 intégrales :

$$P = \int \frac{cos^2T\ dT}{2\pi((G+G')cos^2T+(G+G'')sin^2T)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \int \frac{sin^2T\ dT}{2\pi((G+G')cos^2T+(G+G'')sin^2T)^{\frac{3}{2}}}$$

.

16.

Quant aux quantités P, Q il est clair que chacune devient

$$\frac{1}{2(G+G')^{\frac{3}{2}}}$$

chaque fois que $G = G''$, et dans tous les autres cas elles doivent être rapportées à des quantités transcendantes. La façon dont elles peuvent être représentées par des séries est bien établie. Aussi, nos espérons qu'il sera agréable au lecteur si, à cette occasion, nos expliquons la détermination de l'une ou l'autre de ces transcendantes par un algorithme particulièrement expéditif dont nous nous servons fréquemment depuis maintenant de nombreusese années et sur lequel il a été proposé des activités à profusion en un autre lieu.

Soit m et n deux nombres positifs, posons :

$$m' = \frac{1}{2}(m+n); \quad n' = \sqrt{mn}$$

tels que m', n' soient respectivement les moyennes arithmétiques et géométriques entre m et n. Nous supposerons admis que la moyenne géométrique est toujours positive. De la même manière soit :

[1]Determinatio attractionis, quam in punctum quodlibet positionis datae exerceret planeta, cuius massa par totam eius orbitam, ratione temporis, quo singulas partes describuntur, uniformiter esset dispertita. L'extrait proposé ici correspond aux pages [G, III, p 352 - 355]

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m' + n'), \qquad n'' = \sqrt{m'n'}$$
$$m''' = \tfrac{1}{2}(m'' + n''), \quad n''' = \sqrt{m''n''}$$

et ainsi de suite ; ceci dit, les suites m,m',m'',m''', etc., et n,n',n'',n''', etc. convergent extrèmement rapidement vers *une limite commune*, que nous désignerons par μ et nommerons plus simplement moyenne arithmético-géométrique. Dans un instant nous démontrerons que $\frac{1}{\mu}$ est la valeur de l'intégrale :

$$\int \frac{dT}{2\pi\sqrt{mmcos^2T + nnsin^2T}}$$

prise de $T = 0$ à $T = 360°$

Démonstration : Supposons que la variable T s'exprime au moyen de T' de sorte que

$$sin\ T = \frac{2msin\ T'}{(m+n)cos^2T' + 2msin^2T'}$$

on verra facilement que si T' augmente de la valeur 0 jusqu'à 90°, 180°, 270°, 360°, T croît (même si les intervalles sont différents[2]) de 0 jusqu'à 90°, 180°, 270°, 360°. Les calculs effectués, on trouve que

$$\frac{dT}{\sqrt{mmcos^2T + nnsin^2T}} = \frac{dT'}{\sqrt{m'm'cos^2T' + n'n'sin^2T'}}$$

et donc les valeurs des intégrales

$$\int \frac{dT}{2\pi\sqrt{mmcos^2T + nnsin^2T}}\ , \quad \int \frac{dT'}{2\pi\sqrt{m'm'cos^2T' + n'n'sin^2T'}}$$

prises pour chacune des variables de 0 à 360°, sont égales. Et, comme on peut continuer de la même manière, il est clair que la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{d\theta}{2\pi\sqrt{\mu\mu cos^2\theta + \mu\mu sin^2\theta}}$$

prise de $\theta = 0$ à $\theta = 360°$, est égal à ce qui est évidemment $\frac{1}{\mu}$.

C.Q.F.D.

17.

A partir de l'égalité, traduisant la relation entre T et T'

$$(m-n)sinT.sin^2T' = 2m\ sinT' - (m+n)sinT$$

il vient facilement

$$\begin{aligned}\sqrt{mmcos^2T + nnsin^2T} &= m - (m-n)sinT.sinT' \\ \sqrt{m'm'cos^2T' + n'n'sin^2T'} &= m\ cotanT.tanT'\end{aligned}$$

et de là, avec l'aide de l'égalité ci-dessus

$$\begin{aligned}&sinT.sinT'\sqrt{mmcos^2T + nnsin^2T} + m'(cos^2T - sin^2T) \\ =\ &cosT.cosT'\sqrt{m'm'cos^2T' + n'n'sin^2T'} - \tfrac{1}{2}(m-n)sin^2T'\end{aligned}$$

[2] *etsi inaequalibus intervallis* on peut interpréter ceci de plusieurs façons, peut-être la croissance de T fonction de T'

aprés avoir multiplié cette égalité par

$$\frac{dT}{\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}=\frac{dT'}{\sqrt{m'm'cos^2T'+n'n'sin^2T'}}$$

il vient

$$\frac{m'(cos^2T-sin^2T).dT}{\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}=-\frac{\frac{1}{2}(m-n)sin^2T'.dT'}{\sqrt{m'm'cos^2T'+n'n'sin^2T'}}+d.sinT'.cosT$$

en multipliant cette égalité par $\frac{m-n}{\pi}$, et en substituant :

$$\begin{array}{lcl} m'(m-n) & = & \frac{1}{2}(mm-nn), \\ (m-n)^2 & = & 4(m'm'-n'n'), \\ sin^2T' & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(cos^2T'-sin^2T') \end{array}$$

puis en intégrant de T et $T'=0$ à $360°$, nous obtenons :

$$(mm-nn)\int\frac{(cos^2T-sin^2T).dT}{2\pi\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}$$
$$=-\frac{2(m'm'-n'n')}{\mu}+2(m'm'-n'n')\int\frac{(cos^2T'-sin^2T').dT'}{2\pi\sqrt{m'm'cos^2T'+n'n'sin^2T'}}$$

Et comme on peut transformer de la même manière l'intégrale définie à droite, il est clair que l'intégrale

$$\int\frac{(cos^2T-sin^2T).dT}{2\pi\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}$$

est représentée par la série très convergeante

$$-\frac{2(m'm'-n'n')+4(m''m''-n''n'')+8(m'''m'''-n'''n''')+etc.}{(mm-nn)\mu}=-\frac{\nu}{\mu}$$

Il est tout à fait approprié d'éffectuer les calculs par les logarithmes, si on pose

$$\frac{1}{4}\sqrt{mm-nn}=\lambda,\quad \frac{1}{4}\sqrt{m'm'-n'n'}=\lambda',\quad \frac{1}{4}\sqrt{m''m''-n''n''}=\lambda'' \text{ etc.}$$

On aura alors

$$\lambda'=\frac{\lambda\lambda}{m'},\quad \lambda''=\frac{\lambda'\lambda'}{m''},\lambda'''=\frac{\lambda''\lambda''}{m'''},\ \text{etc. et}$$
$$\nu=\frac{2\lambda'\lambda'+4\lambda''\lambda''+8\lambda'''\lambda'''+\ \text{etc.}}{\lambda\lambda}$$

18.

Par la méthode expliquée ici, il est possible de prendre une intégrale *indéfinie* (dont la valeur de la variable commence à 0) moyennant une modification importante. En effet, si T'' est supposé déterminé par m', n', T' de la même manière que T' par m, n, T et de la même manière ensuite pour T''' par m'', n'', T'' et ainsi de suite, ainsi, pour n'importe quelle valeur de T précisément, les valeurs des termes de la suite T, T', T'', T''', etc. convergeront très rapidement vers une limite θ et on aura

$$\int\frac{dT}{\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}=\frac{\theta}{\mu}$$

$$\int\frac{(cos^2T-sin^2T).dT}{\sqrt{mmcos^2T+nnsin^2T}}=-\frac{\nu\theta}{\mu}+\frac{\lambda'cosTsinT'+2\lambda''cosT'sinT''+4\lambda'''cosT''sinT'''}{\lambda\lambda}$$

mais il suffira, ici, d'évoquer ces résultats, puisqu'ils ne sont pas nécessaires à notre propos.

19.

Si maintenant nous posons $m = \sqrt{G + G'}$, $n = \sqrt{G + G''}$, les valeurs des quantités P et Q sont facilement rapportées aux transcendantes μ, ν. En effet, comme P et Q sont les valeurs des intégrales

$$\int \frac{cos^2 T.dT}{2\pi(mmcos^2 T + nnsin^2 T)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{sin^2 T.dT}{2\pi(mmcos^2 T + nnsin^2 T)^{\frac{3}{2}}}$$

prises de $T = 0$ à $T = 360°$, il est d'abord évident que l'on a

$$mmP + nnQ = \frac{1}{\mu} \cdots\cdots\cdots [1]$$

de plus on a

$$\begin{aligned} \frac{(cos^2 T - sin^2 T).dT}{2\pi\sqrt{mmcos^2 T + nnsin^2 T}} + \frac{(mmcos^2 T - nnsin^2 T).dT}{2\pi(mmcos^2 T + nnsin^2 T)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{(mmcos^4 T - nnsin^4 T).dT}{\pi(mmcos^2 T + nnsin^2 T)^{\frac{3}{2}}} \\ &= d.\frac{cosT\ sinT.dT}{\pi\sqrt{mmcos^2 T + nnsin^2 T}} \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité de $T = 0$ à $T = 360°$, il vient

$$-\frac{\nu}{\mu} + mmP - nnQ = 0 \cdots\cdots\cdots [2]$$

avec les deux égalités [1] et [2], enfin, nous obtenons

$$P = \frac{1 + \nu}{2mm\mu}, \quad Q = \frac{1 - \nu}{2nn\mu}$$

Traduction Jean-Claude Pénin