Recherche d'un théorème général pour trouver la longueur de tout arc d'hyperbole au moyen de deux arcs d'ellipse, suivi de quelques nouveaux théorèmes utiles déduits de ce qui précède.

par **John Landen**[1]

Dans un papier que la Société me fit l'honneur de publier dans les *Philosophicals Transactions* pour l'année 1771, j'avais annoncé que j'avais découvert un théorème général pour trouver le longueur de tout arc d'hyperbole, au moyen de deux arcs d'ellipse, et j'avais promis de communiquer l'examen de ce théorème. Je me propose maintenant d'accomplir ma promesse et me réjouis d'une découverte grâce à quoi nous sommes capables d'apporter de très élégantes conclusions dans de multiples recherches intéressantes, tant mécaniques que purement géométriques. Je me flatte que ce dont je suis sur le point de communiquer, soit reconnu par les gentilhommes qui sont curieux de tels recherches.

1.) A partir du théorème contenu dans *l'article 1* du papier précédemment cité, il s'ensuit que dans l'hyperbole AD *(fig 1)*, si le demi-axe transverse $AC = m - n$; le demi-axe conjugué $= 2\sqrt{mn}$, la perpendiculaire CP, tirée du centre C sur la tangente DP, $= \left((m-n)^2 - t^2\right)^{\frac{1}{2}}$; la différence $DP - AD$ entre la dite tangente DP et l'arc AD est égale à la fluente de $\left(\frac{(m-n)^2 - t^2}{(m+n)^2 - t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dot{t}$.

2.) Il est bien connu, que dans toute ellipse dont le demi-axe transverse est m et le demi-axe conjugué est n. Si x est l'abscisse mesurée à partir du centre sur l'axe transverse et z l'arc entre l'axe conjugué et l'ordonnée correspondant à x, $\left(\frac{m^2 - gx^2}{m^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dot{x}$ sera $= \dot{z}$, g étant $= \frac{m^2 - n^2}{m^2}$.

De là, $\left(\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dot{t}$ étant $= \left(\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m+n)^2 - \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2 t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{m+n}{m-n}\ \dot{t}$

Il apparait, que dans l'ellipse aed *(fig 2)* dont le demi-axe transverse $cd = m + n$, le demi-axe conjugué $ca = 2(mn)^{\frac{1}{2}}$ et l'abscisse cb (correspondant à l'ordonnée be) $= \frac{m+n}{m-n}\ t$; l'arc ae est égal à la fluente de $\left(\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dot{t}$.

3.) Dans l'ellipse $aefd$ *(fig 3)*, le demi-axe transverse cd étant $= m$, le demi-axe conjugué $ca = n$ et l'abscisse cb (corresponsant à l'ordonnée be) $= x$; si ep la tangente en e, interceptée par une perpendiculaire (cp) tirée du centre c, est notée par t ;

$gx \times \left(\frac{m^2 - x^2}{m^2 - gx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (comme il est bien connu) sera $= t$, g étant comme dans le précédent *article*.

De là, $x^2 = \frac{t^2 + m^2 g}{2g} - \frac{\left((m^2 - n^2)^2 - 2(m^2 + n^2)t^2 + t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{2g}$

A partir de cette égalité, en prenant les fluxions, nous avons

[1] Philosophical Transactions, 23 mars 1775

$$x\dot{x} = \frac{t\dot{t}}{2g} + \frac{(m^2+n^2)t\dot{t} - t^3\dot{t}}{2g\Big[(m^2-n^2)^2 - 2(m^2+n^2)t^2 + t^4\Big]^{\frac{1}{2}}} = \frac{t\dot{t}}{2g} + \frac{(m^2+n^2)t\dot{t} - t^3\dot{t}}{2g\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}}$$

Mais $\dot{z}$ étant $= \left(\dfrac{m^2 - gx^2}{m^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dot{x}$ comme observé dans l'article précédent, il apparait que $\dfrac{g}{t} \times x\dot{x}$ est $\dot{z}$. Il est donc évident, que

$$\dot{z} \text{ est } \frac{1}{2}\dot{t} + \frac{1}{2} \times \frac{(m^2+n^2)\,\dot{t} - t^2\dot{t}}{\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{t} + \frac{1}{4} \times \frac{(m-n)^2\,\dot{t} - t^2\dot{t}}{\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} \times \frac{(m+n)^2\,\dot{t} - t^2\dot{t}}{\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{t} + \frac{1}{4} \times \frac{\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\,\dot{t}}{\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} \times \frac{\Big[(m+n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}\,\dot{t}}{\Big[(m-n)^2 - t^2\Big]^{\frac{1}{2}}}$$

A partir de quoi, en prenant les fluentes par les théorèmes des *art. 1* et *2*, nous avons :

$$z = ae(\textit{fig 3}) = \frac{1}{2}t + \frac{DP - AD}{4}(\textit{fig 1}) + \frac{ae}{4}(\textit{fig 2}).$$

Conséquemment, l'arc hyperbolique AD est $DP + ae + 2t - 4ae$. Ainsi, au-delà de mon espérance, je trouve que l'hyperbole peut, en général, être rectifiée au moyen de deux ellipses.

Décrivant E et F par les arcs quadrantaux ad (*fig 2*) et ad (*fig 3*), et L pour la limite de la différence $DP - AD$, puisque le point de contact (D) est supposé amené à une distance infinie du sommet A de l'hyperbole (*fig 1*) nous trouvons :

$$2F - E = L$$

La valeur de ae étant $\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$ quand $t = m - n$; c'est à dire quand e coincide avec d (*fig 2*), et P avec C (*fig 1*), par quoi j'ai prouvé ce que j'ai mentionné dans le papier précédemment cité *art. 10.*

4.) A partir de ce qui a été fait ci-dessus, on déduit les théorèmes utiles suivants :

THEOREME 1

La fluente de $\dfrac{1}{2}\ a^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \dot{z} \left(\dfrac{\frac{b^2}{a} + z}{a - z}\right)^{\frac{1}{2}}$ est $= de$

THEOREME 2

La fluente de $\dfrac{1}{2}\ a^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \dot{z} \left(\dfrac{a - z}{\frac{b^2}{a} + z}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{2a^2}{b^2} + 1\right)de - \left(\dfrac{2a^2}{b^2} + 2\right)ef$

THEOREME 3

La fluente de $\dfrac{\frac{1}{2}\ a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \dot{z}}{\left(b^2 + 2kz - z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 2ef - de = 2F - E + AD - DP$

THEOREME 4

La fluente de $\dfrac{\frac{1}{2}\ a^{-\frac{1}{2}}b^2z^{-\frac{1}{2}}\dot{z}}{\left(b^2+2kz-z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 2(de-ef).$ N.B. $k=\frac{a^2-b^2}{2a}$

Ces théorèmes se rapportent encore au *fig 1.2.3* ; mais maintenant les valeurs de plusieurs des lignes (n'étant plus comme avant) sont spécifiées ici évidemment.

Fig 1 : Dans l'hyperbole AD, le demi-axe transverse AC est maintenant $=a$; le demi-axe conjugué $=b$; la perpendiculaire CP, tirée du centre C sur la tangente DP, est $=(az)^{\frac{1}{2}}$, la droite tangente $DP=\left(\dfrac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}}(b^2+2kz-z^2)^{\frac{1}{2}}$; et l'abscisse CB (correspondant à l'ordonnée BD) est $=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}\times\left(\dfrac{az+b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Fig 2 : Dans l'ellipse aed, le demi-axe transverse cd est $=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, le demi-axe conjugué $ca=b$;
l'abscisse $cb=\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(a-z)^{\frac{1}{2}}$ et l'ordonnée $be=b\times\left(\dfrac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Fig 3 : Dans l'ellipse $aefd$, le demi-axe transverse cd est $=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\ a$; le demi-axe conjugué $ca=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\ a$; les tangentes ep, fq interceptées par les perpendiculaires (cp, cq) tirées à partir du centre c, chacune égales à $a^{\frac{1}{2}}(a-z)^{\frac{1}{2}}$ et l'abscisse (cb' ou cb'') sur cd, correspondant aux points e ou f de la courbe est déterminée par l'expression :

$$\frac{\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+a-z\mp\left(z^2+\frac{b^2}{a}z\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}+(a^2-b^2)^{\frac{1}{4}}}\times cd$$

L'arc quadrantal ad (*fig 2*) est noté E ; l'arc quadrantal ad (*fig 3*)est noté F. L la limite de $DP-AD$ (*fig 1*) est $=2F-E$.

A partir de ce qui vient d'être fait, je peux poursuivre et produire de nouveaux théorèmes pour le calcul des fluentes, mais je me refuse pour l'instant à faire ce travail et après avoir donné un exemple remarquable d'utilisation du théorème 4 dans la détermination de la descente d'un corps lourds sur un arc circulaire, je terminerai ce papier avec quelques remarques relatives aux contenus des articles précédents.

5.) Soit $lpqn$ (*fig 4*) un demi-cercle perpendiculaire à l'horizon, dont le point le plus haut est l, le plus bas n, et le centre m. Soit ps, qt, parallèles à l'horizon et rencontrant le diamètre lmn en s et t ; et soit le rayon lm (ou mn) noté par r ; la hauteur ns par d ; et la distance st par x. Alors, en posant b ($16\frac{1}{12}$ pieds) l'espace qu'un corps lourd, descendant librement de son lieu de repos, décrit en une seconde de temps et, supposant qu'un pendule, ou autre corps lourd, descendant par gravité de p, le long de l'arc pqn , doivent arriver en q : la fluxion du temps de descente sera $=\dfrac{\frac{1}{2}rb^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x}}{\left(2rd-d^2-2(r-d)x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$. La fluente de laquelle, ou le temps de descente de p à q est (par le théorème 4 de l'article précédent) $=\dfrac{2r}{b^{\frac{1}{2}}\times(2r-d)}\times de-ef.$

a (dans ce théorème) étant pris $=d^{\frac{1}{2}}$, $b=(2r-a)^{\frac{1}{2}}$, cb (*fig 2*) $=\left(\dfrac{2r}{d}\right)^{\frac{1}{2}}\times(d-x)^{\frac{1}{2}}$, et ep, fq, (*fig 3*) chacun

$= (d-x)^{\frac{1}{2}}$.
De là, il apparaît, que le temps total de descente de p à n est $= \dfrac{2r}{b^{\frac{1}{2}} \times (2r-d)} \times (E-F)$; quand, dans fig 2 et fig 3 les demi-axes sont pris conformément aux valeurs de a et b précédemment spécifiées.

6.) Si pqn est un quadrant, c'est à dire si d est $= r$, le temps total de descente de p à n sera $= \dfrac{2}{b^{\frac{1}{2}}} \times (E-F)$ par le théorème ci-dessus. Ce temps, comme je l'ai montré dans les *Philos. Transact.* pour 1771, est $= \dfrac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \times \left(\dfrac{1}{2}E + \dfrac{1}{2}\sqrt{E^2-2c}\right)$, c étant le quart du périmètre du cercle dont le rayon est r. Conséquemment, $= \dfrac{2}{b^{\frac{1}{2}}} \times (E-F)$ étant trouvé $= \dfrac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \times \left(\dfrac{1}{2}E + \dfrac{1}{2}\sqrt{E^2-2c}\right)$ nous trouvons à partir de cette équation $F = \frac{3}{4}E - \frac{1}{4}\sqrt{E^2-2c}$, où E est l'arc quadrantal de l'ellipse, dont les axes semi-transverse et semi-conjugué sont $\sqrt{2r}$ et $r^{\frac{1}{2}}$ et F l'arc quadrantal d'une autre ellipse dont les axes semi-transverse et semi-conjugué sont $\left(\dfrac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}$ et $\left(\dfrac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}$.

Avant que M. MacLaurin ne publie son excellent *Traité des fluxions*, quelques éminents mathématiciens pensaient que la *courbe élastique* ne pouvait pas être construite par la quadrature ou la rectification des sections coniques. Mais ce gentilhomme a montré, dans son traité, que la dite courbe peut dans chaque cas être construite par la rectification de l'hyperbole et de l'ellipse ; et il a observé, par le même moyen, que nous pouvons construire la courbe[2] sur laquelle un corps pesant se déplacera et s'éloignera également d'un point donné en un temps égal. C'est la courbe mentionnée que M. James Bernoulli construisit par la rectification de la courbe élastique , ainsi que M. Leibniz et John Bernoulli par la rectification d'une courbe géométrique d'un genre plus élevé que les sections coniques. Il est à noter que la méthode de construction de M. MacLaurin, précédemment signalée, quoique très élégante n'est pas sans défaut. La différence entre l'arc d'hyperbole et sa tangente devant nécessairement être prise, la méthode échoue toujours quand un point principal doit être déterminé sur la figure. Le dit arc et sa tangente devenant alors tous les deux infinis, quoique leur différence reste constante et finie. Le contenu de ce papier, correctement appliqué, témoignera que la *courbe élastique* et la *courbe d'égale récession à partir d'un point donné*[6] peuvent être construite par la rectification de l'ellipse seulement, sans défaillance en quelque point.

[2] Il s'agit de l'isochrone paracentrique

COMMENTAIRES

1.) Il s'agit du premier quadrant de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{(m-n)^2} - \frac{y^2}{4mn} = 1$, c'est à dire la partie de la courbe correspondant à x et y positifs.
Aucun commentaire sur la paramétrage judicieux de cette hyperbole, la référence à l'article des *Philosophical translations* de l'année 1771 ne donne guère plus de renseignements sinon qu'il prend une quantité dérivée de la grandeur géométrique CP, qui apparaît ici égale à :

$$CP = \Big((m-n)^2 - t^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Cette quantité est la distance entre le point de tangence et le pied de la perpendiculaire issue de C origine du repère. On trouve, après quelques calculs, que ce paramétrage définit l'hyperbole par

$$x = \frac{(m-b)^2}{m+n}\sqrt{\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}}; \qquad y = \frac{4mnt}{(m+n)\sqrt{(m-n)^2 - t^2}}$$

On trouve, ensuite, l'élégante formule, donnée par J. Landen :

$$\frac{d(DP) - ds}{dt} = \sqrt{\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}}$$

La *fluente* correspond à l'intégrale ou $\dot{t}$ représente l'élement différentiel habituel dt. Landen, mathématicien anglais, utilise les notations de Newton et non celle de Leibniz, adoptées par les mathématiciens du continent et encore en usage aujourd'hui. La notations de Newton avec le point suscrit est d'ailleurs encore utilisée en physique pour noter la dérivée par rapport au temps.

2.) La première ellipse citée et qui est celle de la *fig. 3*, a pour équation $\dfrac{x^2}{m^2} - \dfrac{y^2}{n^2} = 1$. John Landen considère implicitement que $m > n$. Après avoir calculé l'élément différentiel ds de l'arc, il décrit un changement de variable élémentaire $\dot{t} \mapsto \dfrac{m+n}{m-n}\,\dot{t}$.
Dans la seconde partie il s'agit d'une autre ellipse, celle de la *fig. 2*, d'équation $\dfrac{x^2}{(m+n)^2} - \dfrac{y^2}{4mn} = 1$. Il en cacule encore l'élément différentiel ds de l'arc. Tous ces calculs, assez fastidieux, ne sont pas compliqués.

3.) Il calcule la quantité $t = ep$, distance entre le point de tangence et le pied de la perpendiculaire issue de c sur cette tangente. Il exprime cette quantité en fonction de l'abscisse x.
Il en tire ensuite x^2 en fonction de t par la résolution d'une équation bicarrée en x. Il est à noter qu'il n'en reproduit ici que la racine la plus petite.
L'étude de la fonction $t = ep = f(x)$ sur l'intervalle $[0; m]$ montre qu'elle est croissante sur $[0; x_0]$ et décroissante sur $[x_0; m]$, avec $x_0 = m\sqrt{\dfrac{m}{m+n}}$ et $t_0 = m - n$.
Les deux valeurs de x^2, fournies par l'équation bicarrée ci-dessus, correspondent pour une valeur de t donnée à deux abscisses situées de part et d'autre de x_0.
Il dérive par rapport à t l'expression de x^2 donnée et en tire une expression qu'il intégre de $t = 0$ à $t \leq m-n$ et correspondant aux $x \in [0; x_0]$. Il ne donne, bien sûr, aucun détail sur ces conditions un peu précises et délicates.

Egalité $2F - E = L$
Le texte de J. Landen, me parait ici encore, très résumé.
Je suppose qu'il intégre la formule précédente de $t = 0$ à $t = m - n$. Sur cet intervalle x varie de 0 à ce que j'ai appelé x_0.

En $t=0$

$$ae(fig.3)=0 \text{ car en } t=0,\ x^2=0$$

$$DP-AD(fig.1)=0$$

$$ae(fig.2)=0 \text{ car } cb=0$$

En $t=m-n$

$$ae(fig.3)=ae_0, \text{ c'est moi qui pose } ae_0 \text{ car en } t=m-n,\ x=x_0$$

$$DP-AD(fig.1)=L \text{ (posé par Landen) avec } CP=0 \text{ et } DP=\infty$$

$$ae(fig.2)=ad=E \text{ car } x=m+n$$

On a donc par la formule de Landen :

$$ae_0=\frac{1}{2}(m-n)+\frac{L}{4}+\frac{E}{4}$$

Par contre, il n'est fait aucune mention, dans ce papier, de l'autre intégration basée sur l'autre racine (la plus grande) de l'équation bicarrée en x.

$$x^2=\frac{t^2+m^2g}{2g}+\frac{\left((m^2-n^2)^2-2(m^2+n^2)t^2+t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{2g}$$

Elle donne une forme différentielle analogue à celle que J. Landen a écrit en 3.) et qu'on intégre de façon indéfinie pour obtenir une formule analogue à la précédente :

$z=ae(\textit{fig 3})=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{DP-AD}{4}(\textit{fig 1})-\dfrac{ae}{4}(\textit{fig 2}).$

Cependant si on l'intégre encore de $t=0$ à $t=m-n$, en faisant attention que dans ce cas x varie de m à x_0, on obtient :

En $t=0$

$$ae(fig.3)=F \text{ car en } t=0,\ x=m$$

$$DP-AD(fig.1)=0$$

$$ae(fig.2)=0 \text{ car } cb=0$$

En $t=m-n$

$$ae(fig.3)=ae_0, \text{ car on a } x=x_0$$

$$DP-AD(fig.1)=L \text{ (posé par Landen) avec } CP=0 \text{ et } DP=\infty$$

$$ae(fig.2)=ad=E \text{ car } x=m+n$$

La formule précédente s'écrit alors :

$$ae_0-F=\frac{1}{2}(m-n)-\frac{L}{4}-\frac{E}{4}$$

La soustraction des deux égalités précédentes donne :

$$2F-E=L$$

Est-ce la façon dont a procédé Landen pour obtenir cette égalité, à vrai dire je n'en sais rien. J'ai restitué ici une démonstration possible. Ce qui suit ne concernant pas directement les fonctions elliptiques et ce qu'en utiliseront les mathématiciens à venir, j'arrête ce commentaire ici.

Traduction et commentaire Jean-Claude Pénin

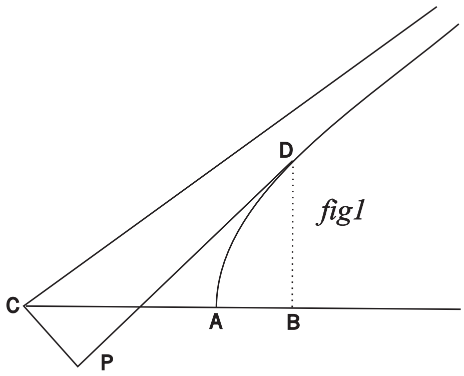

fig1

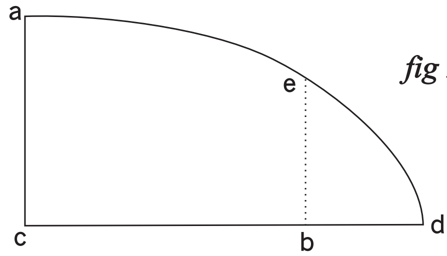

fig 2

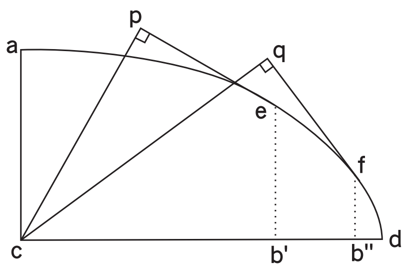

fig 3

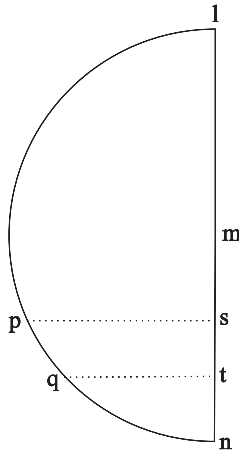

fig 4