OBSERVATIONS SUR LA COMPARAISON DES ARCS DE COURBES NON RECTIFIABLES[1]

Léonard Euler

Sommaire

Cette étude ainsi que la précédente[2] proviennent de la même source. En effet l'une et l'autre reposent sur une méthode consistant à comparer entre elles et algébriquement des formules intégrales qui ne peuvent être représentées ni algébriquement, ni par des angles ou des logarithmes. Or, cette méthode précisément, grâce à qui toute cette étude a été menée, a été acquise, dans des conditions telles qu'elle n'a pas été obtenue suite à un travail construit mais à plutôt été découverte en quelque sorte par hasard ; à partir de quoi, comme on l'a étendue à d'autre recherches très abstraites, elle apparait mériter d'être considérablement perfectionnée avec grande attention.

Certes, dans l'étude précédente on a déjà montré que des arcs quelconques de courbes, arcs qui sont représentés par les intégrales indéfinies $\int \frac{adt}{\sqrt{A+Bz+C^2+Dz^3+Ez^4}}$, peuvent être comparés entre eux et lorsqu'un arc est donné en n'importe quel lieu, d'autres arcs lui présentant une raison donnée peuvent lui être assignés géométriquement ; exactement de la même façon qu'on a l'habitude de comparer entre eux des arcs de cercle. Or, la courbe, qu'on à l'habitude d'appeler *lemniscate*, jouit d'une telle propriété et son arc est représenté par l'intégrale indéfinie $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$; la comparaison de ses arcs sera expliquée abondamment dans cette étude. En outre, ce célèbre auteur étendit ses recherches aux arcs elliptiques et hyperboliques, où l'on apprécie la toute nouvelle puissance de cette méthode, puisque le rectification de l'ellupse et de l'hyperbole ne peut de toute façon être ramenée à des formules intégrales précédemment évoquées. On ne peut pas non plus dans ces courbes comparer leurs arcs comme on le fait avec le cercle ; mais, alors que l'opération fut effectuée il y a un certain temps dans les arcs de parabole,

[1]Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium, *Commentationes analyticae ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes*, Léonard Euler, Opera Omnia, Série prima, opera mathematica, vol. 20 prius, p. 80-107. L'extrait proposé ici correspond aux pages 80-87.

[2]*De integratione aequationis differentialis* $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{mdy}{\sqrt{1-y^4}}$, ibidem p. 58-79

elle nous est offerte, grâce à cette nouvelle méthode, dans les arcs d'ellipse et d'hyperbole. Ainsi, étant donné un arc quelconque pris sur l'une ou l'autre courbe, il est toujours possible d'intercepter sur la même courbe un autre arc, commençant en un point donné dont la différence au premier peut être tenue pour géométrique. En cet endroit on peut compléter l'étude de sorte que la différence, non des arcs eux-mêmes, mais des multiples quelconques de ces derniers soient géométriquement assignables et que l'arc cherché commence en un point donné. Si d'autre part, on laisse de côté cette dernière condition de sorte que l'arc cherché se réduit à un point donné, on peut conclure par conséquent que la différence des arcs eux-mêmes ou bien de multiples quelconques de ces derniers s'annulent et qu'ainsi les arcs qui présentent entre eux une raison parfaitement fixée peuvent être assignés. Et, désormais ce problème qui mérite d'être consigné et dans lequel on demande de partager un arc donné quelconque, soit elliptique ou soit hyperbolique de sorte que la différence de leurs parties deviennent géométriquement assignable, peut être résolu. L'auteur remarque, en conclusion, que de substantiels accroissement dans l'analyse des infinis peuvent être attendus, puisque, de cette façon, des intégrales d'équations différentielles, résistant à toute autre méthode, peuvent être maintenant assignées algébriquement.

Du point de vue de leur utilité, Les recherches mathématiques semblent devoir se réduire à deux classes ; dans la première se trouvent celles qui apportent quelques profits particuliers à la vie commune et aux autres disciplines et à qui, pour cette raison, on a l'habitude d'attribuer une valeur conforme au profit obtenu. Quant à l'autre classe, elle comprend des recherches, lors même qu'elles ne soient d'aucun profit particulier, qui cependant nous offrent l'occasion de repousser les frontières de l'analyse et de stimuler les forces de notre intelligence. Puisque nous sommes contraints d'abandonner de très nombreuses recherches, dont nous pouvions attendre un très grand bénéfice, par suite de la seule imperfection de l'analyse, il parait à propos de tenir compte de l'importance de travaux qui promettent des accroissement non négligeables de l'analyse. Or, en vue de ce but, des observation spécifiques, particulièrement appropriées semblent exister, mais comme elles ont été faites en quelque sorte par accident toujours *a posteriori*, le moyen de parvenir à celles-là même *a priori* et par un voie directe a été peu voire aucunement examiné. Si, en effet, cette réalité était désormais connue on pourrait rechercher plus facilement parmi ces méthode celle qui conduiraient directement à la vérité et, il ne fait aucun doute que grâce à la recherche de nouvelle méthodes les limites de l'analyse reculeront de façon appréciable.

Or, j'ai trouvé quelques observation de cette nature, faites sans aucune méthode avérée ni raison apparente dans le livre des oeuvres de l'Illustre Comte FAGNANO, qui ont été publiées récemment ; par conséquent, ces observation doivent mériter toute notre attention et l'étude qui en est développée dans la suite ne doit pas être considérée comme inutile. Aussi, a-t-on évoqué dans ce livre certaines propriétés singulières que possèdent les Ellipses, Hyperboles et lemniscates, à savoir, que des arcs différents de ces courbes se comparent entre eux; or, comme la raison de ces propriétés semble très mystérieuse, je pense ne pas être hors sujet si je les examine avec soin, il me revient également d'évoquer ces courbes si je fais une publication.

Il est connu que la rectification concerne au premier lieu ces courbes et qu'elle transcende toutes les forces de l'analyse, au point que leurs arcs, non seulement ne peuvent s'exprimer algébriquement, mais ne peuvent non plus se réduirent à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. C'est pourquoi et à plus forte raison semble étonnant ce que l'illustre Comte FAGNANO trouva, à savoir que dans l'Ellipse et l'Hyperbole deux arcs puisse être déterminés d'une infinité de manière de sorte que leur différence puisse être représentée géométriquement, que dans la Lemniscate deux arcs puissent être donnés d'une infinité de manières de sorte qu'ils soient ou bien égaux entre eux ou bien l'un à l'autre dans un rapport double, à partir de quoi, il déduit, ensuite, la façon d'assigner sur cette même courbe des arcs qui présentent entre eux une autre raison.

En vérité, il m'est impossible de trouver quoi que ce soit de plus sur l'Ellipse et l'Hyperbole; par conséquent, je me contenterai de fournir une construction plus facile de ces arcs dont on peut représenter géométriquement le différence. Quant à la courbe Lemniscate, marchant sur les mêmes traces, j'ai évoqué les très nombreuses, et qui plus est, infinies formules dont, par faveur, non seulement je peux déterminer d'une infinité de manières deux arcs de telles sorte qu'ils soient égaux entre eux ou bien dans un rapport double, mais aussi qu'ils soient entre eux dans une rapport quelconque de nombre à nombre.

I. ELLIPSE

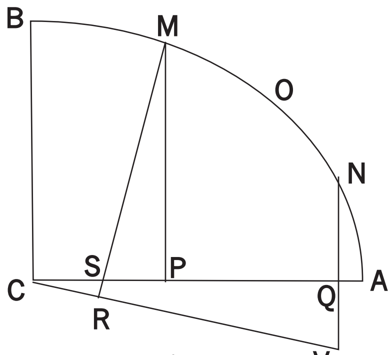

fig.1

1. Soit un quart d'ellipse ABC (fig 1), de centre C, dont on suppose que les demi-axes sont CA = 1 et CB = c ; ayant pris une abscisse quelconque CP = x l'ordonnée qui lui correspond sera $PM = y = c\sqrt{1-xx}$; Or comme sa différentielle est $dy = -\frac{cxdx}{\sqrt{1-xx}}$, on aura l'arc elliptique correspondant à l'abscisse CP = x.

$$BM = \int \frac{dx\sqrt{1-(1-cc)xx}}{\sqrt{1-xx}}$$

On pose pour abréger 1-cc = n, de sorte que l'arc

$$BM = \int \frac{dx\sqrt{1-nxx}}{\sqrt{1-xx}}$$

Si on prend une autre abscisse quelconque CQ = u, on aura, de la même manière, pour l'arc correspondant

$$BM = \int \frac{dx\sqrt{1-nuu}}{\sqrt{1-uu}}$$

Ces prémisses posées, quelle relation doit-il y avoir entre ces deux abscisses x et u pour que la somme des arcs

$$BM + BN = \int \frac{dx\sqrt{1-nxx}}{\sqrt{1-xx}} + \int \frac{dx\sqrt{1-nuu}}{\sqrt{1-uu}}$$

devienne intégrable ou puisse être rendu géométrique.

2. La question se ramène à celle-ci : déterminer une fonction de x qui doit être substituée à u pour que la formule différentielle

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

soit intégrable. Or, on reconnait facilement, si on considère cette question en l'espèce, que sa solution dépend pour l'intégration des deux formules et, pour cette raison, excède autant les limites de l'analyse qu'elle repose précisément sur la rectification de l'ellipse. Donc puisqu'on ne peut espérer, en aucune façon, une solution générale, on devra chercher des solutions particulières qui, de même qu'il n'y a aucune raison avérée pour les trouver, ainsi l'essentiel de cette activité devra compter sur le hasard et la conjecture. A partir de quoi, le réel fondement de ces solutions, lors même quelles soient précisément reconnues, ne pourra qu'être acquis avec peine.

3. Certes, on aperçoit immédiatement le cas u = -x où notre formule différentielle se réduit à zéro ; mais puisque deux arcs d'ellipse égaux et semblables proviennent de ces valeurs, ce cas est ici trop évident pour que l'on doive estimer qu'il ne satisfera en rien la question posée. Donc, puisque toutes ces questions doivent être résolues par la recherche de solutions particulières, supposons

$$\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = \alpha u$$

et α est donné tel que l'on ait réciproquement

$$\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = \alpha x$$

On aura alors

$$BM + BN = \alpha \int udx + \alpha \int xdu = \alpha xu + Const$$

,tout à fait comme on l'a demandé. Pour la valeur, précisément, de α nous avons
soit $1 - nxx - \alpha\alpha uu + \alpha\alpha uuxx = 0$ soit $1 - nuu - \alpha\alpha xx + \alpha\alpha xxuu = 0$
A partir de quoi il est clair que l'on doit avoir $\alpha\alpha = n$ ou $\alpha = \sqrt{n}$ de sorte que

$$u = \sqrt{\frac{1 - nxx}{n - nxx}} \quad \text{et} \quad BM + BN = xu\sqrt{n} + Const$$

.

4. Bien qu'il semble que nous nous soyons acquittés de la question de cette manière, cependant ces déterminations ne peuvent avoir lieu dans l'Ellipse. En effet, comme $n < 1$, puisque $n = 1 - cc$, on aura $n - nxx < 1 - nxx$ et par conséquent $u > 1$; donc l'abscisse CQ sera plus grande que le demi-axe CA et, pour cette raison, correspondra à un arc imaginaire, de sorte que cette hypothèse ne fournira aucune conclusion censée.

5. Nous essaierons donc d'autre formules, soient :

$$\sqrt{\frac{1 - nxx}{1 - xx}} = \frac{\alpha}{u} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{1 - nuu}{1 - uu}} = \frac{\alpha}{x}$$

D'où il vient :

$$\alpha\alpha - \alpha\alpha xx - uu + nxxuu = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\alpha - \alpha\alpha uu - xx + nuuxx = 0$$

Nous en concluons que $\alpha = 1$ de sorte que :

$$1 - uu - xx + nxxuu = 0 \quad \text{et donc} \quad u = \sqrt{\frac{1 - xx}{n - nxx}}$$

produisent alors

$$BM + BN = \int \frac{dx}{u} + \int \frac{du}{x} = \int \frac{xdx + uddu}{xu}$$

mais l'équation $uu + xx = 1 + nxxuu$ différentiée donne

$$xdx + udu = nxu(xdu + udx) \quad \text{ou} \quad \frac{xdx + udu}{xu} = n(xdu + udx)$$

D'où nous concluons

$$BM + BN = n \int (xdu + udx) = nxu + Const.$$

6. Cette solution ne souffre d'aucune difficulté ; puisqu'en effet pour $n < 1$, on aura $1 - nxx > 1 - xx$ et pour cette raison $u < 1$, comme le demande la nature de la relation entre u et v. Par conséquent, ayant choisi une abscisse quelconque $CP = x$, prenons l'autre

$$CQ = u = \sqrt{\frac{1 - xx}{1 - nxx}}$$

alors, on aura pour la somme des arcs $BM + BN = nxu + Const$; Afin de calculer cette constante, faisons $x = 0$, de sorte que $BM = 0$; on aura alors $u = 1$ et l'arc BN s'étend sur tout l'arc $BMNA$; à partir de quoi on a $0 + BMNA = 0 + Const$. Ainsi cette constante est $= BMNA$. Remplaçant la constante par cette valeur nous obtenons :

$$BM + BN = nxu = (1 - cc)xu = BN - AM$$

7. Si on donne sur un quart d'Ellipse ACB un point quelconque M il est possible d'affecter un autre point N, tel que la différence des arc $BM - AN$, ou bien celle qui lui est égale $BN - AM$, s'exprime algébriquement. Afin de faire voir ceci plus facilement menons du point M, la normale MS à l'Ellipse ; on aura la sous-normale $PS = ccx$ et à cause de $PM = c\sqrt{1 - xx}$ la normale

$$MS = c\sqrt{1 - xx + ccxx} = c\sqrt{1 - nxx}$$

et, pour cette raison, l'abscisse de l'autre point N sera $CQ = u = \frac{PM}{MS}CA$. Ou bien que l'on abaisse du point C la perpendiculairee CR à la normale MS prolongée, et qu'elle soit prolongée jusqu'en V, de sorte que $CV = VA = 1$, et à cause de $\frac{CR}{CS} = \frac{PM}{MS}$ on aura $CQ = \frac{CR}{CS}CV$. C'est pourquoi, ayant mené du point V la perpendiculaire VQ à l'axe CA, elle déterminera le point Q et prolongée, précisément, le point N.

8. Puisque $PS = ccx$, on aura $CS = x - ccx = nx$ et pour cette raison

$$CR = \frac{CQ.CS}{CV} = \frac{u.nx}{1} = nux$$

Donc cette même perpendiculaire CR nous fera connaître la différence des arcs $BM - AN$ ou bien $BN - AM$. Ainsi, de cette façon la différence des arcs nommés sera $= nx\sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$,qui s'annule lorsque $x = 0$ et $x = 1$, où les points M et N coincident respectivement avex les points B et A. Cette différence devient maximale si $nx^4 - 2xx + 1 = 0$[3], c'est-à-dire si $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$, auquel cas on a $x = u$ et les deux points coincident en un point unique O ; ce cas correspond à la différence des arcs $BO - AO = nxx = 1 - c$ et par conséquent sera égale à la différence des semi-axes $CA - CB$, de sorte que $CA + AO = CB + BO$.

9. Si le point M est placé au point O, de sorte que

$$CP = x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$$

on aura

$$PM = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}} \text{ et } PS = \frac{c\sqrt{cc}}{\sqrt{1+c}}$$

et de là $MS = c\sqrt{c}$, par conséquent la place du point O pourra être déterminée de différentes façons.
Or puisque l'on a :

$$CM = CO = \frac{\sqrt{1+c^3}}{\sqrt{1+c}} = \sqrt{1-c+cc} = \sqrt{1+cc-2c\;cos\;60^\circ}$$

On en déduira, par conséquent, une construction facile, donc il parait à propos de proposer les théorèmes suivants dont la démonstration à partir de ce qui a été exposé est claire.

THEOREME 1

10. *Si sur un quart d'ellipse ACB, on mène d'un point quelconque la tangente HMK, qui coupe l'axe CB en H, et qu'on la prenne, en longueur, égale à l'autre axe CA tel que HK=CA, qu'ensuite on mène par le point K la parallèle à l'axe CB coupant l'ellipse en N, la différence des arcs BM et AN, c'est à dire BM - AN pourra être géométriquement construite. En effet, ayant abaissé du centre C la perpendiculaire CT à la tangente, la différence des arcs $BM - AN = MT$.*

[3]le maximum de nxu est obtenu pour u=x, l'équation du 5. donne précisément ce qu'on cherche, ce qui ne semble pas le raisonnement d'Euler ou j'ai mal compris le tout

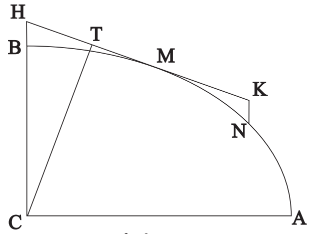

fig. 2

La démonstration est évidente à partir de la figure puisque la tangente HMK est parallèle à la droite CRV (*fig.* 1 p. 3) et égale ; ensuite il est clair que MT = CR.

THEOREME 2

11. Si sur un quart d'ellipse ACB, (*fig.* 3) on construit sur le demi-axe CA le triangle équilatère CAE et que sur son côté AE on prenne le segment AF = CB et après avoir joint CF on trace à l'ellipse le droite CO qui lui est égal, le point O aura la propriété suivante :

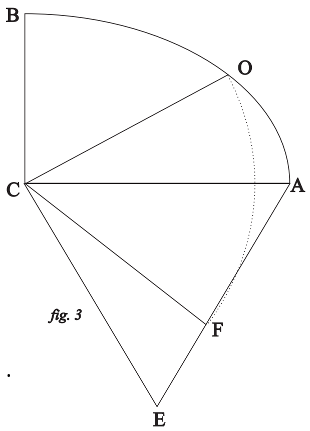

fig. 3

$$CA + arc\ AO = CB + arc\ BO$$

La démonstration est évidente à partir du § 9. En effet, on a CA = 1, AF = c et l'angle CAF = 60° donc on aura

$$CF = \sqrt{1 + cc - 2e\ cos\ 60°}$$

$$= CO$$

Traduction Jean-Claude Pénin